ECUACIONES DIFERENCIALES II
M. en C. Gerardo Mejía Rodríguez
Tarea 4

1. Escriba en coordenadas polares los siguientes sistemas y determine si el origen es un centro, un foco inestable o un foco estable.

   (a)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_2\\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2.\end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1 x_2^2\\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2^3.\end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1^5\\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2^5.\end{aligned}$$

2. Determine la naturaleza de los puntos de equilibrio de de los siguientes sistemas no lineales; sea tan específico como sea posible.

   (a)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_1 x_2\\ \dot{x}_2 &= x_2 - x_1^2.\end{aligned}$$

   (b)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -4x_2 + 2x_1 x_2 - 8\\ \dot{x}_2 &= 4x_2^2 - x_1^2.\end{aligned}$$

   (c)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 - 2x_1 x_2\\ \dot{x}_2 &= 2x_2 - x_1^2 + x_2^2.\end{aligned}$$

   (d)
$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1^2 - x_2^2 + 1\\ \dot{x}_2 &= 2x_1.\end{aligned}$$

3. El gobernador centrífugo (veáse la figura) fue patentado por James Watt en 1789 para controlar la máquina de vapor. Este está descrito por el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{\varphi} = \psi$$

$$
\begin{aligned}
\dot{\psi} &= n^2\omega^2 \sin\varphi cos\varphi - \Omega^2 \sin\varphi - \frac{b}{m}\psi, \\
\dot{\omega} &= \frac{1}{l}(\mu\cos\varphi - F),
\end{aligned}
$$

similar a aquellas derivadas por Vishnegradskii en 1876. Aquí las variables dinámicas son $\varphi \in [0, 2\pi]$, el ángulo entre el eje S y los brazos giratorios de longitud L, ω es la velocidad rotacional del volante, y ψ es la aceleración angular. Las constantes en la ecuación son n la razón de transmisión de engranaje- la razón entre la velocidad angular del eje y el volante, $\Omega = \sqrt{g/L}$ la frecuencia del brazo de péndulo, b la fricción del volante, m la masa de los brazos giratorios, I el momento de inercia del volante, F el torque sobre la máquina, y μ que representa el torque creado por vapor causado al cerrar la válvula cuando el collar se eleva sobre el eje.

(a) Demuestre que reescalando el tiempo, haciendo $\tau = \Omega t$, y definiendo nuevas variables $(x, y, z) = (\varphi, \psi/\Omega, n\omega/\Omega)$, las ecuaciones pueden ser reducidas al sistema

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= y, \\
\dot{y} &= \sin x(z^2\cos x - 1) - \epsilon y, \\
\dot{z} &= \alpha(\cos x - \beta)
\end{aligned}
$$

para los nuevos parámetros $(\alpha, \beta, \epsilon)$.

(b) Demuestre que si β es suficientemente pequeña, existe un único punto de equilibrio no negativo (x^*, y^*, z^*).

(c) Linealize respecto del punto de equilibrio y encuentre el polinomio característico.

(d) Demuestre que existe un valor crítico $\epsilon_0(\alpha, \beta)$, tal que si $\epsilon > \epsilon_0$, entonces el punto de equilibrio es asintóticamente estable, y si $0 < \epsilon < \epsilon_0$, entonces el punto de equilibrio es un punto silla.

4. Construya la función de Liapunov para determinar la estabilidad del punto de equilibrio de $(0, 0)$ para los siguientes sistemas en R^2.

(a)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - x_2^2 - x_1^3 \\
\dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_1 x_2.
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 - x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1 x_2 \\
\dot{x}_2 &= -x_1 - 3x_1^2 + x_2^2 + 2x_1 x_2.
\end{aligned}
$$

(*Sugerencia:* Traté con series de potencias para L, comenzando con términos cuadráticos. Adhiera términos de orden más alto si es necesario. Algunas ocasiones es más fácil checar para el Hamiltoniano que construir la función de Liapunov en principio.)

5. Un sistema lineal es asintóticamente estable siempre que tenga una función de Liapunov de la forma $L = x^T S x$.

   (a) Demuestre que cuando todos los valores propios de A tienen parte real negativa, entonces la función de Liapunov

   $$A^T S + SA = -I$$

   tiene una única solución simétrica, positiva definida

   $$S = \int_0^\infty e^{\tau A^T} e^{\tau A} d\tau.$$

   (*Sugerencia:* Premultiplique la función de Liapunov por $e^{\tau A^T}$ post-multiplique por $e^{\tau A}$, entonces se puede identificar al miembro derecho como una derivada total. recuerde que $e^{A^T+A} \neq e^{A^T} e^A$.)

   (b) Calcule S para la matriz $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$ y demuestre explícitamente que $\frac{dL}{dt} < 0$.

6. Bosqueje los retratos de fase para los siguientes sistemas. Determine si el sistema es Hamiltoniano o gradiente durante el proceso.

   (a) $x' = x + 2y$, $y' = -y$

   (b) $x' = y^2 + 2xy$, $y' = x^2 + 2xy$

   (c) $x' = x^2 - 2xy$, $y' = y^2 - 2xy$

   (d) $x' = x^2 - 2xy$, $y' = y^2 - x^2$

7. El oscilador forzado de Duffing está modelado por el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

   $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_1^3 - \delta x_2. \end{aligned}$$

   (a) Demuestre que el caso $\delta = 0$ es sistema es Hamiltoniano y encuentre su Hamiltoniano.

   (b) Esboce las curvas de nivel de H en este caso($\delta = 0$).

   (c) Bosqueje le retrato de fase para el sistema. Incluya la descripción de todos los puntos de equilibrio y cualesquiera conexiones de punto silla que existan.

   (d) Si $\delta \neq 0$ estudie la naturaleza de los puntos de equilibrio del sistema.

8. Consideremos el sistema autonómo no lineal

   $$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + 4x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2) \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 + 4x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2). \end{aligned}$$

(a) Escribalo en coordenadas polares.

(b) Aplique el teorema de Poincaré-Bendixon para demostrar que existe una trayectoria cerrada entre los círculos $r = 1$ y $r = 3$.

(c) Hallar la solución general no constante $x = x(t)$, $y = y(t)$ del sistema original, y usarla para hallar una solución periódica correspondiente a la trayectoria cerrada cuya existencia se ha establecido en (b).

(d) Dibujar la trayectoria cerrada y al menos un par de trayectorias más en el plano fase.

9. En este ejercicio usted demostrará la propiedad

$$J_{M_0}(P(x,y), Q(x,y)) = sgn\ (a) J_{M_0}(P(x,y), Q(x,y))$$

(a) Demuestre que

$$((1 - (1 - |a|)\lambda)P, Q), \quad (x,y) \in \partial S_r,\ 0 \leq \lambda \leq 1$$

es una deformación continua no singular entre dos campos vectoriales. Esto prueba la parte para $a > 0$.

(b) Demuestre que el número de rotación de un campo vectorial continuo cambia de signo bajo una trasnformación de reflexión $(x,y) \to (-x,y)$ o $(x,y) \to (x,-y)$.

(c) Finalmente suponga que tenemos un campo vectorial continuo $f = (P,Q)$ sobre D y no singular sobre ∂D. Demuestre que

$$\gamma(f, \partial D) = -\gamma((-P,Q), \partial D)$$

de lo que se concluye el resultado.

10. Investigue la estructura global (usando la esfera de Poincaré) de las trayectorias para los siguientes sistemas de ecuaciones diferenciales

(a) $\dot{x} = 2x(1 + x^2 - 2y^2),\ \dot{y} = -y(1 - 4x^2 + 3y^2)$

(b) $\dot{x} = x(3 - x - y)$, $\dot{y} = y(x - 1)$

11. (**Punto extra**.) Durante todo el curso hemos mencionado varios resultados debidos a Henri Poincaré y en gran medida refinados por Otto Bendixon. Sin *copy-paste*, redacte un resumen biográfico de estos dos personajes, los cuales se les considera los fundadores de la teoría cualitativa en ecuaciones diferenciales ordinarias.

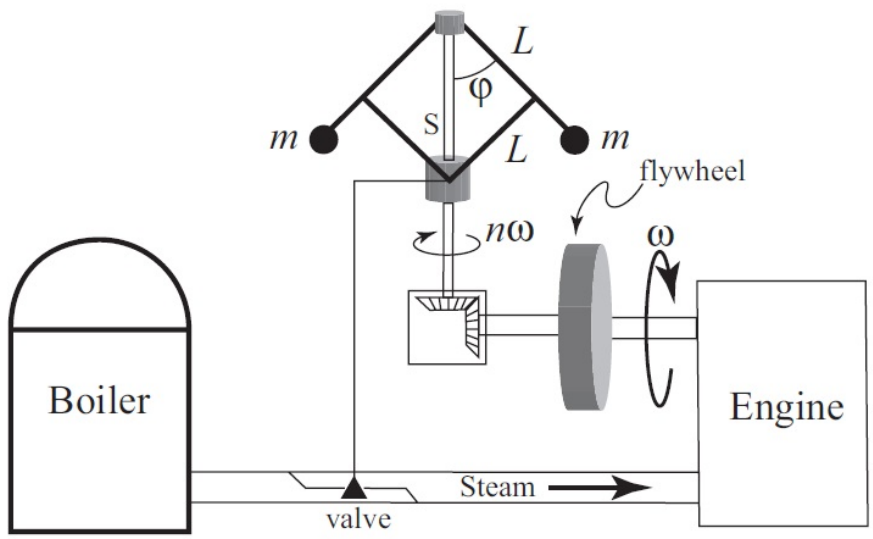

Figure 1: Figura para el ejercicio 3, el gobernador de Watt