Análisis Numérico I
M. en C. Gerardo Mejía Rodríguez
Tarea 4

1. Encuentre la solución de la siguiente ecuación nolineal

$$2x = e^{-x}$$

   a) Usando el método de bisección.
   b) Usando el método de la secante.
   c) Usando una iteración de punto fijo.
   d) Usando el método de Newton.
   e) Usando el método de falsa posición.

   Explique sus resultados en términos del error en cada paso.

   Sugerencia: Escriba sus códigos para cada uno de los métodos y compare el comportamiento del error en cada uno de los métodos para 10 iteraciones.

2. El problema involucra usar el método de bisección en algunos ejemplos.

   a) Grafique la función
   $$y = x^3 + 2x + 2$$
   ¿A qué solución convergerá el método de bisección si $a_0 = -1.5$ y $b_0 = 1$? ¿A cuál si $a_0 = -2$ y $b_0 = 1.5$?.

   b) Grafique la función
   $$y = x^5 - x^4 + 1 - x$$
   en$(-1.5, 1.5)$. ¿A qué solución convergerá el método de bisección si $a_0 = -2$ y $b_0 = 2$? ¿A cuál si $a_0 = -2$ y $b_0 = 4$? También explique cómo es posible qué el método de bisección encuentre la solución $x = 1$.

3. La ecuación $x^3 - x = 0$ tiene tres raíces, -1, 0, 1. Estudiaremos el comportamiento del método de Newton sobre esta ecuación

   a) ¿Qué pasa si $x_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}$? Demuestre que x_n converge a 1 para cualquier $x_0 > \frac{1}{\sqrt{3}}$. ¿Cuál es el resultado análogo para la convergencia a -1?

   b) ¿Qué pasa si $x_0 = \frac{1}{\sqrt{5}}$? Demuestre que x_n converge a 0 para cualquier $x_0 \in (-\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}})$. *Sugerencia:* Demuestre primero que si $x_0 \in (0, \frac{1}{\sqrt{5}})$, entonces $x_1 \in (-x_0, 0)$, ¿Qué puede decir entonces acerca de x_2?

   c) Encuentre, al dibujar (con lapíz y papel) $\lim_{n\to\infty} x_n$ si x_0 es un poco menor que $1/\sqrt{3}$. Calcule $\lim_{n\to\infty} x_n$ si $x_0 = 0.46$.

d) Una discución completa de la cuestión en (c) es mucho más complicada, pero existe una relación de recurrencia implícita que produce una sucesión decreciente $\{a_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}, a_2\ a_3, ...\}$, por medio de la cual uno puede encontrar fácilmente $\lim_{n\to\infty} x_n$ para cualquier $x_0 \in (\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. Trate de encontrar esta recurrencia.

Sugerencia:*Puede ser de mucha utilidad hacer un análisis de la gráfica de la ecuación.*

4. **Método de Steffesen.**

a) Considere la fórmula de iteración

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{g(x_n)}$$

donde

$$g(x) = \frac{f(x + f(x)) - f(x)}{f(x)}.$$

Demuestre, bajo hipótesis adecuadas, que converge cuadráticamente.

b) Programe y pruebe el método en (a) utilizando las ecuaciones

1) $x = \tan x$,

2) $x^3 + 3x = 5x^2 + 7$

Efectúe 10 iteraciones y explique sus resultados.

5. La ecuación

$$x + \ln x = 0$$

se puede escribir, por ejemplo, como

- $x = -\ln x$,
- $x = e^{-x}$,
- $x = \frac{x+e^{-x}}{2}$.

a) ¿Cuál de las fórmulas puede ser usada?

b) ¿Cuál de las fórmulas debería ser usada?

c) Dé una fórmula aún mejor.

Efectúe experimentos numéricos que corroboren su análisis.

6. Las coordenadas cartesianas de un planeta en una órbita elíptica en el tiempo $a(e \sin x, \cos x)$, donde a es la longitud del semieje mayor, y e la excentricidad de la elipse. Usando las leyes de Kepler del movimiento planetario se puede demostrar que el ángulo x, llamada la anomalía excéntrica, satisface la ecuación de Kepler

$$x - e \sin x = M, \quad 0 < |e| < 1,$$

donde $M = 2\pi t/T$ es la anomalía promedio y T es el periodo orbital.

a) Use el método de Newton para resolver la ecuación de Kepler. Demuestre que para cada e, M existe una única solución real $x = \alpha$ tal que $M - |e| \leq \alpha < M + |e|$.

b) Demuestre que el simple método de iteración de punto fijo

$$x_{n+1} = e \sin x_n + M$$

con $x_0 = 0$ es convergente.

c) Estudie la convergencia del método de Newton

$$x_{n+1} = x_n + \frac{e \sin x_n - x_n + M}{1 - e \cos x_n}$$

7. Considere la ecuación general de tercer grado

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

Nuestro objetivo en este ejercicio es comparar la eficiencia al usar el método de Newton con respecto de la fórmula de Tartaglia.

a) Encuentre un cambio de variable que elimine el término de segundo grado de tal manera que la ecuación anterior se pueda escribir como

$$y^3 + py + q = 0.$$

b) Use la transformación $y = u + v$ para escribir a la ecuación obtenida en (a) como el siguiente sistema

$$\begin{aligned} -q &= u^3 + v^3 \\ -\frac{p}{3} &= uv. \end{aligned}$$

c) Muestre que las soluciones del sistema en (b) están dadas por las soluciones de la ecuación cuadrática

$$y^2 + qy - \frac{p^3}{27} = 0$$

d) Resolviendo esta ecuación y efectuando todas las transformaciones anteriores en reversa ecuentre la fórmula de Cardano-Tartaglia

e) Usando la fórmula de Cardano-Tartaglia encuentre la raíz α de la ecuación

$$x^3 = x + 4$$

Calcule el valor explícito de α usando la expresión obtenida. Discuta la pérdida de precisión debida a la cancelación.

f) Calcule α a la misma precisión usando el método de Newton con la aproximación inicial $x_0 = 2$. Explique sus resultados.

8. Este ejercicio explora cómo usar el método de Newton para evaluar la inversa de una función. Para explicar, dada $y = g(x)$, entonces la función inversa satisface $x = g^{-1}(y)$. El problema es dado y, ¿Cuál es el valor de x?

   a) Suponiendo que y está dada y haciendo $f(x) = y - g(x)$, demuestre que el método de Newton está dado por

   $$x_{i+1} = x_i + \frac{y - g(x_i)}{g'(x_i)}, \quad i = 0, 1, 2, ...$$

   b) Use el resultado en (a) para evaluar e^2 y e^{-3} usando la función $\ln x$.

   c) Use el resultado en (a) para evaluar $\arccos(1/2)$ y $\arccos(1/3)$.

   d) La función de error está definida por

   $$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-s^2} ds$$

   La función inversa del error es denotada por $\operatorname{erf}^{-1}(x)$. Use el resultado de la parte (a) para evaluar $\operatorname{erf}^{-1}(1/2)$ y $\operatorname{erf}^{-1}(1/3)$. Al hacer esto, pueden usar el comando de MATLAB erf para evaluar la función error.

   e) La integral elíptica completa de primera clase está definida como

   $$K(x) = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{(1 - s^2)(1 - xs^2)}} ds$$

   La función inversa es denotada por $K^{-1}(x)$. Use el resultado de la parte (a) para evaluar $K^{-1}(4)$ y $K^{-1}(4)$. Es útil saber que

   $$K(x) = \frac{E(x) - (1 - x)K(x)}{2x(1 - x)}$$

   donde $E(x)$ es la integral eliptíca completa de segunda clase. Al hacer esto, pueden usar el comando ellipke de MATLAB para evaluar K y E.

9. Considere el sistema de dos ecuaciones

   $$\begin{aligned} f_1(x, y) &= x^2 + ay^2 - 1 = 0 \\ f_2(x, y) &= (x - 1)^2 + y^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

   donde a es un parámetro.

   a) Escriba las fórmulas explícitas para la iteración del método de Newton. Primero escriba a éste en la forma

   $$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} + J^{-1} \begin{pmatrix} x_n^2 + ay_n^2 - 1 \\ (x_n - 1)^2 + y_n^2 - 1 \end{pmatrix}$$

donde usted exhiba explícitamente al Jacobiano J y su inversa J^{-1}. Segundo, evalúe explícitamente esta expresión, es decir, multiplique y simplifique.

b) Usando las fórmulas en (a), escriba un programa (muy corto) en MATLAB para implementar la iteración de Newton sólo para este ejemplo. Traté esto para $a = 1$.

c) Efectúe experimentos numéricos para tratar de determinar si existe un a para el cual la iteración falla. Explique su respuesta.

10. Sin copy-paste, escriba una reseña biográfica de los siguientes personajes

    a) Alexander Aitken,

    b) Joseph Raphson,

    c) Johan Frederick Steffensen,

    d) David E. Muller,

    destacando sus principales aportaciones al análisis numérico.