Temas selectos de análisis numérico
Solución numérica de ecuaciones diferenciales parciales
M. en C. Gerardo Mejía Rodríguez
Tarea 2

1. Determine el orden de precisión de las siguientes ecuaciones de diferencias para los problemas de valor inicial dados.

   (a) Esquema explícito para la ecuación de calor con término de orden más bajo

   $$v_k^{n+1} = v_k^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x}(v_{k+1}^n - v_{k-1}^n) + \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}(v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n)$$

   para

   $$u_t + au_x = Du_{xx}.$$

   (b) El esquema de Dunfort-Frankel

   $$v_k^{n+1} = \frac{2\lambda}{1+2\lambda}(v_{k+1}^n + v_{k-1}^n) + \frac{1-2\lambda}{1+2\lambda}v_k^{n-1}$$

   donde

   $$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x^2},$$

   para la ecuación

   $$u_t = u_{xx}.$$

2. Para valores de x en el intervalo $[-1, 3]$ y t en $[0, 2.4]$, resuelva la ecuación de una onda

   $$u_t + u_x = 0$$

   con dato inicial

   $$u(0,x) = \begin{cases} \cos \pi x^2 & \text{si } |x| \leq 1/2; \\ 0 & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

   y la condición de frontera $u(t, -1) = 0$.

   Encuentre la solución numérica usando los siguientes cuatro esquemas con $h = 0.1$, 0.05, 0.025

   (a) El esquema hacia atrás en el tiempo y adelante en el espacio con $\lambda = 0.8$.

   (b) El esquema hacia atrás en el tiempo y central en el espacio con $\lambda = 0.8$.

   (c) El esquema de Lax-Friedrichs con $\lambda = 0.8$ y $\lambda = 1.6$.

   (d) El esquema de Leapfrog con $\lambda = 0.8$.

Para los esquemas en (b), (c) y (d), en la frontera derecha use la condición $v_m^{n+1} = v_{m-1}^{n+1}$, donde $x_m = 3$. Para el esquema en (d) use (b) para calcular la solución en $n = 1$.

Para cada uno de los esquemas determine si éste es útil o inútil. Para propósitos de este ejercicio *solamente*, un esquema será inútil si $|v_m^n| > 5$ para cualquier valor de m y n; será considerado como un esquema útil si la solución se ve como una aproximación razonable a la solución de la ecuación diferencial. Grafique varias soluciones en el tiempo final donde la aproximación funciona. ¿ Qué le sucede al tiempo de explosión para los esquemas inútiles cuando el tamaño de la malla decrece? ¿Existe un patrón para estas soluciones? Para los casos útiles, ¿cómo decrece el error cuando el tamaño de la malla decrece, es decir, si h decrece por un medio, por cuánto decrece el error ?

3. Analice la estabilidad y convergencia, respecto de la ecuación de calor unidimensional, del siguiente esquema de diferencias

$$v_k^{n+1} = v_k^n + \lambda \left[-\frac{1}{12} v_{k-2}^n + \frac{4}{3} v_{k-1}^n - \frac{5}{2} v_k^n + \frac{4}{3} v_{k+1}^n - \frac{1}{12} v_{k+2}^n \right]$$

donde $\lambda = \frac{2\Delta t}{\Delta x^2}$.

4. Resuelva el problema de valor inicial y de frontera

$$\begin{aligned} u_t &= D u_{xx}, & x \in (0,1), t > 0 \\ u(x,0) &= \cos \frac{\pi x}{2}, & x \in [0,1] \\ u(1,t) &= 0, & t \geq 0 \\ u_x(0,t) &= 0, & t \geq 0. \end{aligned}$$

usando el esquema de diferencias

$$\begin{aligned} v_k^{n+1} - \lambda (v_{k+1}^{n+1} - 2u_k^{n+1} + v_{k-1}^{n+1}) &= v_k^n \\ v_k^0 &= \cos \frac{\pi k \Delta x}{2} \\ u_M^{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

con $\lambda = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2}$ usando las diversas aproximaciones a la condición de frontera tipo Neumann. Use $M = 10$, $k = 0.004$ y $D = 1$. Encuentre las soluciones en $t = 0.06$, $t = 0.1$ y $t = 0.9$.

5. Discuta la consistencia, estabilidad y convergencia del esquema de diferencias BTCS

$$v_{jk}^{n+1} - r_x \delta_x^2 v_{jk}^{n+1} - r_y \delta_y^2 v_{jk}^{n+1} = v_{jk}^n$$

para la ecuación de calor bidimensional.

6. **Un problema lineal de valor en la frontera.** Considere el problema de valor en la frontera

$$\begin{aligned} y'' - \alpha(2x-1)y' - 2\alpha y &= 0, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= 1 \\ y(1) &= 1. \end{aligned}$$

   (a) Verifique que $y = e^{-\alpha x(1-x)}$ es la solución exacta.
   (b) Usando diferencias centrales escriba la ecuación de diferencias y la ecuación matricial correspondiente.
   (c) Dibuje sobre los mismos ejes la solución numérica y exacta para $N = 10$ y $\alpha = 10$.
   (d) Con $\alpha = 10$, grafique el error máximo en una gráfica log-log, para $N = 10$, 20, 40, 80. Explique sus resultados en términos del error local de truncamiento.

7. **Un problema nolineal de valor en la frontera.** El desplzamiento vertical de un cable satisface

$$\begin{aligned} y'' &= \mu\sqrt{1+(y')^2}, \quad 0 < x < 1, \\ y(0) &= \alpha \\ y(1) &= \beta. \end{aligned}$$

   donde μ es una constante positiva.

   (a) Escriba la discretización de este problema y su linealización.
   (b) El método requiere una adivinanza para su inicialización. Escriba una función que considere una elección razonable y explique la razón por la cual ésta debería satisfacer el requerimiento de proximidad del método de Newton.
   (c) Dibuje la simulación numérica en el caso $N = 9$. En este caso tome $\mu = 9$, $\alpha = 8$, $\beta = 6$, $l = 1$.
   (d) La solución exacta tiene la forma

$$y(x) = B + \frac{1}{\mu}\cosh(\mu x + A)$$

   donde A y B se determinan a partir de las condiciones de frontera. Con esto, dibuje la solución exacta y la solución numérica de la parte (c) sobre los mismos ejes.
   (e) Grafique, usando log-log, el error máximo como una función de N tomando $N = 10, 20, 40, 80, 160$. ¿El error se comporta como se esperaba?

8. **La ecuación de Poisson con condiciones de frontera tipo Neumann.** Considere el problema de valor en la frontera

$$-\nabla^2 u = f(x,y) \quad \text{en}\,\Omega$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}u(x,0) &= 0\\
u(x,b) &= 0\\
\frac{\partial}{\partial x}u(0,y) &= 0\\
u(a,y) &= 0
\end{aligned}
$$

donde $\Omega = [0,a] \times [0,b]$.

(a) Usando diferencias centrales encuentre el sistema de ecuaciones de diferencias para este problema (Suponga $h = k$), tome $N = M = 3$.

(b) Ensamble la matriz asociada al resultado en la parte (a).

(c) Observe que la matriz que obtuvo en este caso no es simétrica, sin embargo ésta se puede volver simétrica al dividir algunas ecuaciones por constantes adecuadas; efectúe esto.

(d) Describa las características de la matriz obtenida.

(e) Escriba un codigo de computadora que resuelva este problema con $a = b = 1$ para $h = 0.1, 0.01, 0.001$. *Sugerencia:* Matlab tiene insertada la instrucción *sparse* para almacenar matrices ralas.

9. **Problemas elípticos en coordenadas polares.** Considere el anillo

$$
\Omega = \{(r,\theta) : 0.5 < r < 1,\ 0 \le \theta < 2\pi\}
$$

en el cual tenemos el problema

$$
\begin{aligned}
-\nabla^2 u &= 0 && \text{en}\,\Omega\\
u(0.5,\theta) &= \sin(2\theta) && \theta \in [0,2\pi]\\
u(1,\theta) &= \sin(3\theta) && \theta \in [0,2\pi]
\end{aligned}
$$

(a) Use diferencias finitas para aproximar la solución a este problema con $M_r = M_\theta = 20$.

(b) Repita la parte (a) con $M_r = M_\theta = 100$.

10. **Un poco de cultura.** En el 2016 se estrenó la película de *Talentos Ocultos* (Hidden Figures). Su misión en este ejercicio consiste de lo siguiente:

(a) Vea la película.

(b) Escriba un ensayo, de entre una y dos páginas, acerca de la película.

(c) Investigue en que consiste el problema, desde el punto de vista numérico, que se estaba resolviendo y mencione las herramientas matemáticas necesarias para abordarlo.